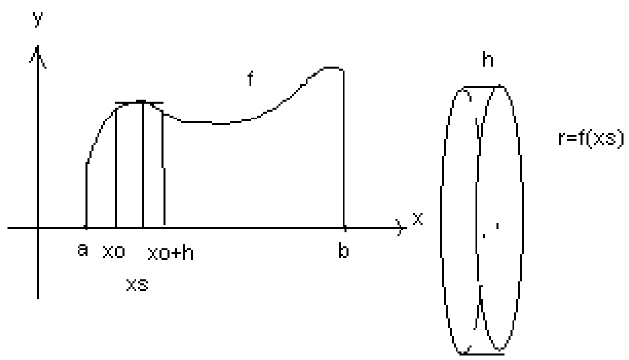
Matematik A. **Rumfang af omdrejningslegemer**

af Lars Henrik Nielsen, Aalborg Universitet

1. Drejning om x-aksen:

Lad f være en kontinuer ikke negativ funktion i intervallet [a;b] og lad for $x_o \in$[a;b] $M(x_0) = \{(x,y) \mid a \le x \le x_0 \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ være en punktmængde. Vi antager, at for ethvert $x_o \in$[a;b] har den punktmængde, som fremkommer ved drejning af M(x_o) om x-aksen, et rumfang. Dette rumfang er en funktion af x_o og betegnes med $V_1(x_o)$.

Figur 1



Lad h være et lille positivt tal. Vi ser på funktionstilvæksten for $V_1(x_o)$: $\Delta V_1 = V_1(x_o+h) - V_1(x_o)$. Drejningen af grafen for f i intervallet [x_o; x_o+h] om x-aksen frembringer en skive med tykkelsen h *(se* figur 1).

Lad x_u være valgt således, at $f(x_u)$ er minimum for f(x) i intervallet [x_o; x_o+h] og x_s valgt således, at $f(x_s)$ er maksimum for f(x) i intervallet [x_o; x_o+h]. Rumfanget af cylinderen på figur 1 er $\pi r^2 h$, hvor r = f(x_s). Der gælder da

$$\pi \cdot f(x_u)^2 \cdot h \le \Delta V_1 \le \pi \cdot f(x_s)^2 \cdot h \Leftrightarrow \pi \cdot f(x_u)^2 \le \frac{\Delta V_1}{h} \le \pi \cdot f(x_s)^2$$

Da $f(x_u) \to f(x_o)$ for h $\to$ 0 og $f(x_s) \to f(x_o)$ for h $\to$ 0 fordi f er kontinuert fås, at $\frac{\Delta V_1}{h} \to \pi \cdot f(x_0)^2$ for $h \to 0$, dvs at V_1 er en differentiabel funktion og $V_1'(x_o) = \pi \cdot f(x_o)^2$. Det er klart, at V_1(a) = 0. Man får da rumfanget af hele omdrejningslegemet i intervallet [a;b] :

$V = V_1(b) - V_1(a) = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$. Tilfældet h<0 kan vises på tilsvarende måde. Vi har vist følgende sætning:

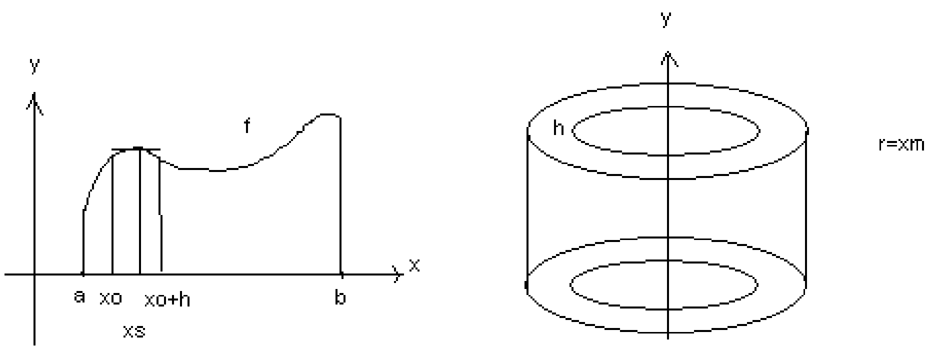
Sætning 1
Lad f være en kontinuert ikke negativ funktion i intervallet [a;b] og lad $M = \{(x, y) \mid a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ være en punktmængde. Ved drejning om x-aksen af M fås et omdrejningslegeme, som har rumfanget

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

2. Drejning om y-aksen:

Lad f være en kontinuer ikke negativ funktion i intervallet [a;b] . Der skal gælde, at [a;b] $\subset$ [0;∞[eller [a;b] $\subset$]-∞;0] og lad for $x_o \in$[a;b] $M(x_0) = \{(x, y) | a \le x \le x_0 \wedge 0 \le y \le f(x)\}\rangle$ være en punktmængde. Vi antager, at for ethvert $x_o \in$[a;b] har den punktmængde, som fremkommer ved drejning af $M(x_o)$ om y-aksen, et rumfang. Dette rumfang er en funktion af x_o og betegnes med $V_2(x_o)$.

Figur 2



Lad h være et lille positivt tal og antag at [a;b] $\subset$ [0;∞[. Vi ser på funktionstilvæksten for $V_2(x_o)$: $\Delta V_2 = V_2(x_o+h) - V_2(x_o)$. Drejningen af grafen for f i intervallet [x_o; x_o+h] om y-aksen frembringer en cylinderskal med tykkelsen h (se figur 2). Lad x_u være valgt således, at $f(x_u)$ er minimum for f(x) i intervallet [x_o; x_o+h] og x_s valgt således, at $f(x_s)$ er maksimum for f(x) i intervallet [x_o; x_o+h] og x_m er midtpunktet af intervallet. Rumfanget af denne skal på figur 2 er $2\pi rh \cdot f(x_s)$, hvor r = x_m, idet middel-omkredsen er $2\pi r$, højden $f(x_s)$ og tykkelsen h. Der gælder da

$$2\pi \cdot x_m f(x_u) \cdot h \le \Delta V_2 \le 2\pi \cdot x_m \cdot f(x_s) \cdot h \Leftrightarrow 2\pi \cdot x_m \cdot f(x_u) \le \frac{\Delta V_2}{h} \le 2\pi \cdot x_m f(x_s)$$

Da $f(x_u) \to f(x_o)$ for h $\to$ 0 , $f(x_s) \to f(x_o)$ for h $\to$ 0 og $x_m \to x_o$ for h $\to$ 0 fordi f er kontinuert fås, at $\frac{\Delta V_2}{h} \to 2\pi \cdot x_0 \cdot f(x_0)$ for h $\to$ 0, dvs at V_2 er en differentiabel funktion og $V_2'(x_o) = 2\pi \cdot x_0 \cdot f(x_0)$.

Det er klart, at V_2(a) = 0. Man får da rumfanget af hele omdrejningslegemet i intervallet [a;b] :

$V = V_2(\mathrm{b}) - V_2(\mathrm{a}) = \int_a^b 2\pi \cdot x \cdot f(x)dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx$. Tilfældene h<0 og [a;b] ⊂]-∞;0] kan vises på tilsvarende måde. Hvis [a;b] ⊂]-∞;0] skal der være et numerisktegn i formlen, da radius i omdrejningen er $-x_m$.

Vi har vist følgende sætning:

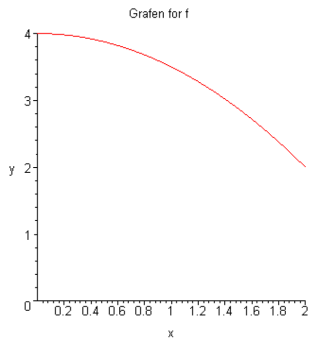
<u>Sætning 2</u>

Lad f være en kontinuert ikke negativ funktion i intervallet [a;b], hvor [a;b] ⊂ [0;∞[eller [a;b] ⊂]-∞;0] og lad $M = \{(x,y) \mid a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ være en punktmængde. Ved drejning om y-aksen af M fås et omdrejningslegeme, som har rumfanget

$$V = \left| \; 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx \; \right|$$

Eks.1

Lad $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, $x \in [0;2]$



1) drejning om y-aksen:

$$V = 2\pi \int_0^2 x(-\frac{1}{2}x^2 + 4)dx = 2\pi \int_0^2 (-\frac{1}{2}x^3 + 4x)dx = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{8}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 = 12\pi \approx 37{,}70$$

2) drejning om x-aksen:

$$V = \pi \int_0^2 (-\frac{1}{2}x^2 + 4)^2 dx = \pi \int_0^2 (\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 16)dx = \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 16x \right]_0^2 = \frac{344}{15}\pi \approx 72{,}05$$