Delprøve uden hjælpemidler: kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 (10 %)

To planer er givet ved ligningerne: $\alpha: 2x+y-3z+1=0$ og $\beta: -2x-y+3z-5=0$.

a) Gør rede for, at de to planer er parallelle.

De to planer er parallelle, hvis planernes normalvektorer er parallelle.

$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha = t\,\vec{n}_\beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2=-2t \Leftrightarrow t=-1 \\ 1=-t \Leftrightarrow t=-1 \\ -3=3t \Leftrightarrow t=-1 \end{matrix}$$

Det vil sige: De to planer er parallelle

$\underline{\underline{\text{De to planer er parallelle}}}$

b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem α og y-aksen.

Skæring med y-aksen for: $x=0$ og $z=0$. dvs. $\alpha: 2\cdot 0+y-3\cdot 0+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

$\underline{\underline{Q_y(0,-1,0)}}$

Opgave 2 (5 %)

a) Bestem integralet: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,dx.$

Substitution: $u=x^2+2x-1 \Rightarrow du=(2x+2)\,dx=2(x+1)\,dx \Leftrightarrow (x+1)\,dx=\frac{1}{2}du$, som indsættes:

$$I=\int \frac{\frac{1}{2}du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-1\right|$$

$\underline{\underline{I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-1\right|+c}}$

Opgave 3 (10 %)

En differentialligning er givet ved: $\dfrac{dy}{dx}-2y=e^x$.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.

MF(161): $y'+a(x)\cdot y=b(x)$ har løsningen: $y=e^{-A(x)}\displaystyle\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx+c\cdot e^{-A(x)}$

vi har: $a(x)=-2$; $b(x)=e^x$

$$A(x)=\int a(x)\,dx=\int -2\,dx=-2x$$

$$\int b(x)\cdot e^{A(x)}\,dx=\int e^x e^{-2x}\,dx=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$$

Vi får så: $y=e^{2x}(-e^{-x})+c\,e^{2x}=-e^x+c\,e^{2x}$

$\underline{\underline{y=-e^x+c\,e^{2x}}}$

b) Undersøg, om funktionen $y=f(x)=-e^x+8e^{2x}$ er en løsning til differentialligningen.

Sættes c i den fuldstændige løsning lig med 8, fås: $y=-e^x+8e^{2x}$,altså er den angivne funktion en løsning.

Eller ved at indsætte funktionen $y=f(x)$ samt y' i differentialligningen.

$y=-e^x+8e^{2x} \Rightarrow y'=-e^x+8\cdot 2e^{2x}$. Indsættes i differentialligningen:

$-e^x+16e^{2x}-2\cdot(-e^x+8e^{2x})=e^x \Leftrightarrow$

$-e^x+16e^{2x}+2e^x-16e^{2x}=e^x$ hvilket er sandt

Opgave 4 (10 %)

En vektor $\vec{a}$ er givet ved: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, og en vektor $\vec{b}$ er givet ved: $\vec{b}=\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}$, hvor k er et tal.

a) Bestem $\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right|$ udtrykt ved *k*.

MF (67): $|\vec{b}_a|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$$|\vec{b}_a|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|2k+6|}{\sqrt{13}}$$

$$\underline{\underline{|\vec{b}_a|=\frac{|2k+6|}{\sqrt{13}}}}$$

b) Bestem *k*, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bliver lige lange.

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^3}=\sqrt{13}$; $|\vec{b}|=\sqrt{k^2+2^2}=\sqrt{k^2+4}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{13}=\sqrt{k^2+4} \Rightarrow 13=k^2+4 \Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow k=\pm 3$

$$\underline{\underline{k=\pm 3}}$$

Opgave 5 (5 %)

En funktion g er givet ved: $g(x)=\sin(x)$.

$g'(x)=\cos(x)$

a) Løs ligningen: $g'(x)=\dfrac{1}{2}$ for $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\cos(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_0=\dfrac{\pi}{3}$

Ud fra enhedscirklen ses at $x_1=-\dfrac{\pi}{3}$ også er en løsning

$$\underline{\underline{x_0=\frac{\pi}{3}\vee x_1=-\frac{\pi}{3}}}$$

Opgave 6 (5 %)

En cirkel er givet ved ligningen: $(x-2)^2+(y-k)^2=25$, hvor k er et tal, og et punkt $P(6,2)$ ligger på cirklen.

a) Bestem *k*.

Koordinaterne for P indsættes i cirklens ligning:

$(6-2)^2+(2-k)^2=25 \Leftrightarrow 4^2+4+k^2-4k=25 \Leftrightarrow$

$k^2-4k+16+4-25=0 \Leftrightarrow k^2-4k-5=0 \Leftrightarrow$

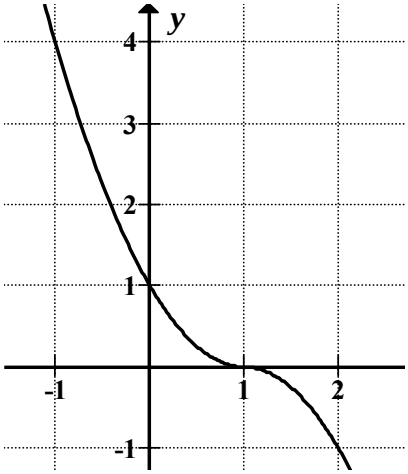
$$k=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-5)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$k=\frac{4\pm 6}{2}=2\pm 3=\begin{matrix}5\\-1\end{matrix}$$

$$\underline{\underline{k=-1\vee k=5}}$$

Opgave 7 (5 %)

På figuren ses grafen for funktionen F, der er stamfunktion til funktionen f.



a) Bestem tallet $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

$F(2)=-1\,;\,F(-1)=4$, Aflæst på grafen.

$$I=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)=-1-4=-5$$

$\underline{\underline{I=-5}}$

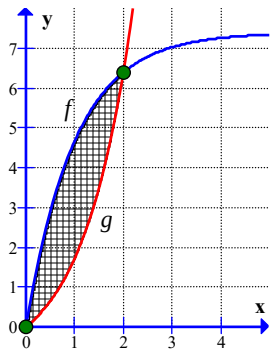
Delprøve med alle hjælpemidler: kl. 9.00-13.00

Hjælpemidler kan først benyttes efter kl.11.00, når første delprøve er afleveret.

Opgave 8 (15 %)

To funktioner er givet ved:

$f(x)=e^2\cdot\left(1-e^{-x}\right)$ og $g(x)=e^x-1$. For begge funktioner gælder at $x\geq 0$.



a) Skitsér graferne for de to funktioner, og beregn koordinatsættene til deres skæringspunkter.

$e^2\cdot(1-e^{-x})$ $\boxed{\text{STO}\rightarrow}$ $y1(x)$

e^x-1 $\boxed{\text{STO}\rightarrow}$ $y2(x)$

Solve$(y1(x)=y2(x),x)\,|\,x\geq 0\rightarrow x=0$ or $x=2$

$y1(0)\rightarrow 0\quad y1(2)=e^2-1\approx 6{,}389$

$\underline{\underline{Q_1(0,0)\,;\,Q_2(2;6{,}389)}}$

Området M er afgrænset af graferne for de to funktioner.

b) Beregn arealet af *M*.

$$A=\int_0^2 (y1(x)-y2(x))\,dx\rightarrow 4$$

$A=4$

Buelængden L af grafen for f i intervallet $[a;b]$ kan bestemmes af: $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

c) Bestem buelængden af grafen for *f* i intervallet $0\leq x\leq 2$.

Buelængden beregnes på TI-89: $\text{arcLen}(f(x),x,a,b)=\text{arcLen}(y1(x),x,0,2)\rightarrow 6{,}789$

$\underline{\underline{L=6{,}789}}$

Eller ved anvendelse af formlen $L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

$$f'(x)=d(y1(x),x)\rightarrow e^{2-x}\;\Rightarrow\;L=\int_0^2\sqrt{1+(e^{2-x})^2}\,dx\rightarrow 6{,}789$$

Opgave 9 (10 %)

En linje l er givet ved: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$ og et punkt er givet ved: $A(4,0,1)$.

$$\overrightarrow{P_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_0A} = \vec{A} - \overrightarrow{P_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder linjen *l* og punktet *A*.

En normalvektor til planen er givet ved:

$\vec{n} = \vec{r} \times \overrightarrow{P_0A} = \mathbf{crossP}([3,2,1],[3,1,-1]) \rightarrow [-3,6,-3]$

En ligning for planen er så: $-3x + 6y - 3z + d = 0$

Konstanten d bestemmes ved at indsætte koordinaterne for A eller for P_0 .

Koordinaterne for A indsættes: $-3 \cdot 4 + 0 - 3 \cdot 1 + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 15$

$$\underline{\underline{-3x + 6y - 3z + 15 = 0}}$$

b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen *l* og *xy*-planen.

Vi har: $x = 1 + 3t \,;\, y = -1 + 2t \,;\, z = 2 + t$

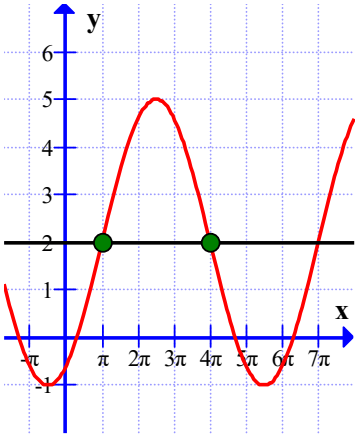
$$2 + t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -2$$

Skæring med xy-planen for: $z = 0$ dvs. for: $x = 1 + 3 \cdot (-2) = -5$

$$y = -1 + 2 \cdot (-2) = -5$$

$$\underline{\underline{Q_{xy}(-5,-5,0)}}$$

Opgave 10 (15 %)



En harmonisk svingning er givet ved: $f(t) = 3\sin\left(\frac{t-\pi}{3}\right) + 2.$

$$f(t) = 3\sin\left(\frac{t-\pi}{3}\right) + 2 = 3\sin\left(\frac{1}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + 2$$

$$a = 3 \,;\, b = \frac{1}{3} \,;\, c = -\frac{\pi}{3} \,;\, k = 2$$

a) Bestem perioden, faseforskydningen og værdimængden for svingningen.

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{1} = 6\pi$$

$$\varphi = -\frac{c}{b} = -\frac{-\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{1} = \pi$$

$$\underline{\underline{T = 6\pi \,;\, \varphi = \pi}}$$

$$y_{\max} = k + a = 2 + 3 = 5$$
$$y_{\min} = k - a = 2 - 3 = -1$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Vm}(f) = [-1;5]}}$$

b) Bestem den stamfunktion *F* til *f*, som opfylder: $F(\pi)=5$.

$$3\sin\left(\frac{(t-\pi)}{3}\right)+2\ \boxed{\text{STO}\rightarrow}\ f(t)$$

$F(t)$ bestemmes ved: $F(t)=\int f(t)\,dx+c$

$$F(t)=\int(f(t),t)+c\rightarrow -9\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+2t+c$$

$$F(\pi)=\ -9\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+2t+c\,|\,t\rightarrow\pi\rightarrow c+2\pi-9$$

$$F(\pi)=5\ \Leftrightarrow\ c+2\pi-9=5\ \Leftrightarrow\ c=14-2\pi\approx 7{,}7168$$

$$\underline{\underline{F(t)=-9\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+2t+14-2\pi}}$$

c) Bestem løsningerne til ligningen $f(t)=2$ for $t\in[-\pi;6\pi]$.

solve($3\sin(\frac{1}{3}t-\frac{\pi}{3})+2=2,t$**)** $|-\pi\le t\le 6\pi\rightarrow t=\pi$ or $t=4\pi$

$$\underline{\underline{t=\pi\vee t=4\pi}}$$

Opgave 11 (10 %)

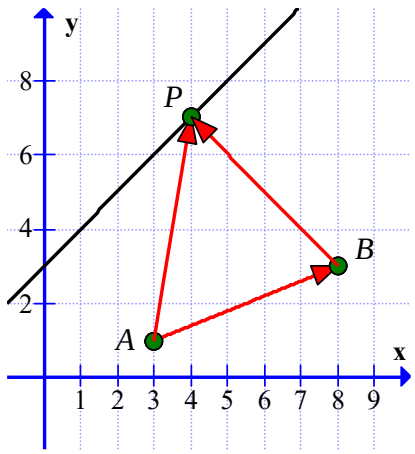
En linje *l* er givet ved: $x-y+3=0$ og to punkter er givet ved: $A(3,1)$ og $B(8,3)$.

a) Bestem vinklen mellem stedvektorerne til punkterne *A* og *B*.

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A||B|}=\frac{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+1}\,\sqrt{8^2+3^2}}=\frac{3\cdot 8+3}{\sqrt{10}\,\sqrt{73}}=\frac{27}{\sqrt{10}\,\sqrt{73}}\ \Rightarrow\ \theta=2{,}121°$$

$$\underline{\underline{\theta=2{,}121°}}$$

Et punkt *P* ligger på linjen *l*, således at arealet af ΔABP er 14.



b) Bestem koordinatsættene til de to mulige beliggenheder af *P*.

$|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP})|=2T$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$x-y+3=3\ \Leftrightarrow\ y=x+3\ \Leftrightarrow\ \vec{P}=\begin{pmatrix}x\\x+3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP}=\vec{P}-\vec{A}=\begin{pmatrix}x\\x+3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\x+2\end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP})=\begin{vmatrix}5 & x-3\\2 & x+2\end{vmatrix}=5(x+2)-2(x-3)=5x+10-2x+6=3x+16$$

$$|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP})|=2T=2\cdot 14=28\ \Rightarrow\ |3x+16|=28$$

solve(abs$(3x+16)=28,x$**)** $\rightarrow x=4$ or $x=-\frac{44}{3}\approx -14{,}66$

$$x=4\ \Leftrightarrow\ y=4+3=7$$

$$x=-\frac{44}{3}\ \Leftrightarrow\ y=-\frac{44}{3}+3=-\frac{35}{3}\approx -11{,}666$$

$$\underline{\underline{P(4,7)\vee P\left(\frac{-44}{3},\frac{-35}{3}\right)}}$$